1. TAREA 1: Cálculo de derivadas.

A continuación se exponen los desarrollos que permiten obtener las derivadas de las funciones pedidas. En la mayor parte de los casos, se trata o bien de escribir la función de un modo más adecuado, antes de derivar, o bien una manipulación correcta de las expresiones obtenidas tras derivar.

1. Partimos de la función:

$$y = ln\left(\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}\right), \qquad x \in D \subset \mathbb{R}$$

Por las propiedades de los logaritmos, podemos escribir dicha función como diferencia de dos logaritmos, en la forma:

$$y = ln(1+sen(x)) - ln(1-sen(x))$$

De este modo es más sencillo derivar. En efecto, recordando que

$$\frac{dln(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{dsen(x)}{dx} = cos(x)$$

y aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$y' = \frac{cos(x)}{1+sen(x)} - \frac{-cos(x)}{1-sen(x)} = cos(x)\cdot\left(\frac{1}{1+sen(x)} + \frac{1}{1-sen(x)}\right) =$$
$$= cos(x)\cdot\left(\frac{1+\cancel{sen(x)}+1-\cancel{sen(x)}}{(1+sen(x))\cdot(1-sen(x))}\right) = cos(x)\cdot\left(\frac{2}{1-sen^2(x)}\right) =$$
$$= cos(x)\cdot\frac{2}{cos^2(x)} = \frac{2\cdot cos(x)}{cos^2(x)} = \frac{2}{cos(x)} = 2\cdot sec(x)$$

donde se ha utilizado la conocida relación trigonométrica,

$$1 - sen^2(x) = cos^2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La expresión pedida para la derivada es, por tanto:

$$\boxed{y' = \frac{2}{cos(x)} = 2\cdot sec(x)}$$

2. Se considera la función $y = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$, que vamos a expresar en la forma:

$$y = arcsen\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Recordando que

$$\frac{d \quad arcsen(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

y aplicando nuevamente la regla de la cadena, podremos escribir:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-\cancel{x} \cdot \cancel{\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{x} \cdot (1+x^2) \cdot \cancel{\sqrt{1+x^2}}} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Vemos como se cancelan términos tanto en el numerador como en el denominador. Por tanto, la expresión de la función derivada pedida es:

$$\boxed{y' = \frac{-1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Existe un segundo procedimiento, un tanto más ingenioso, que simplifica bastante las operaciones. Se basa en efectuar un cambio de variable en la función original, y utilizar las relaciones trigonométricas:

$$\frac{1}{\sqrt{1+tag^2(t)}} = cos(t), \qquad \frac{tag(t)}{\sqrt{1+tag^2(t)}} = sen(t)$$

La primera de las expresiones anteriores, y la forma que tiene la función

$$y = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

nos sugiere el cambio de variable $x = tag(t)$. Con este cambio nuestra función, ahora dependiente de la variable t, queda en la forma:

$$y(t) = arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{1+tag^2(t)}}\right) = arcsen\left(cos(t)\right)$$

donde al ser $x = tag(t) \to t = arctag(x)$. Observar que derivar esta función respecto de t es mucho más sencillo. De hecho,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-cos^2(t)}} \cdot -sen(t) = \frac{-sen(t)}{sen(t)} = -1$$

Aplicando la regla de la cadena, si derivamos y respecto de x, tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -1 \cdot \frac{d(arctag(x))}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

que es la misma expresión de la derivada que habíamos obtenido antes.

3. Se considera la función

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1+\sqrt{sen(x)}}{1-\sqrt{sen(x)}}\right) - arctag(\sqrt{sen(x)})$$

Podemos proceder por derivación directa, y tratar de simplificar la expresión al máximo. En primer lugar expresamos la función del siguiente modo:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(ln(1+\sqrt{sen(x)}) - ln(1-\sqrt{sen(x)})\right) - arctag(\sqrt{sen(x)})$$

Derivando respecto de la variable x,

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\sqrt{sen(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot cos(x) - \frac{1}{1-\sqrt{sen(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot cos(x)\right) -$$

$$-\frac{1}{1+(\sqrt{sen(x)})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot cos(x) =$$

Sacando el factor común $\frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot cos(x)$, queda:

$$= \frac{cos(x)}{4\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{1}{1+\sqrt{sen(x)}} + \frac{1}{1-\sqrt{sen(x)}} - \frac{2}{1+sen(x)}\right) =$$

$$= \frac{cos(x)}{4\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{1-\cancel{\sqrt{sen(x)}}+1+\cancel{\sqrt{sen(x)}}}{(1-\sqrt{sen(x)})\cdot(1+\sqrt{sen(x)})} - \frac{2}{1+sen(x)}\right) =$$

$$= \frac{cos(x)}{4\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{2}{1-sen(x)} - \frac{2}{1+sen(x)}\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot cos(x)}{4\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{1}{1-sen(x)} - \frac{1}{1+sen(x)}\right) =$$

$$= \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{1+sen(x)-1+sen(x)}{1-sen^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{2sen(x)}{1-sen^2(x)}\right) == \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot \left(\frac{2sen(x)}{cos^2(x)}\right) =$$

$$\frac{2 \cdot sen(x)}{cos^2(x)} \cdot \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} = \frac{\cancel{2} \cdot sen(x)\cancel{cos(x)}}{\cancel{2} \cdot cos^{\cancel{2}}(x) \cdot \sqrt{sen(x)}} =$$

$$= \frac{sen(x)}{cos(x) \cdot \sqrt{sen(x)}} = \frac{\sqrt{sen(x)}}{cos(x)}$$

donde en el último paso se ha racionalizado la expresión.

<u>Método II:</u> Por cambio de variable.

Vamos a utilizar el método empleado en el apartado anterior, para obtener la derivada a través de un cambio de variable. La forma de la función sugiere hacer el siguiente cambio:

$$\sqrt{sen(x)} = t \leftrightarrow sen(x) = t^2 \leftrightarrow x = arcsen(t)$$

De este modo, la función y, se transforma en:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - arctag(t) = \frac{1}{2} \cdot (ln(1+t) - ln(1-t)) - arctag(t)$$

Derivar esta nueva función, respecto de la variable t es bastante más sencillo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+t} - \frac{-1}{1-t}\right) - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) - \frac{1}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+t+1-t}{(1+t)(1-t)}\right) - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1-t^2}\right) - \frac{1}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1+t^2}{1-t^4} = \frac{2t^2}{1-t^4}$$

Como, por el cambio efectuado, $t^2 = sen(x)$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t^2}{1-t^4} = \frac{2 \cdot sen(x)}{1-sen^2(x)} = \frac{2 \cdot sen(x)}{cos^2(x)}$$

Por otro lado, derivar t respecto de x también es bastante simple:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\sqrt{sen(x)}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{sen(x)}} \cdot cos(x) = \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}$$

Con todo, aplicando la regla de la cadena, podremos escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2 \cdot sen(x)}{cos^2(x)} \cdot \frac{cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} = \frac{\cancel{2} \cdot sen(x)\cancel{cos(x)}}{\cancel{2} \cdot cos^{\cancel{2}}(x) \cdot \sqrt{sen(x)}} =$$

$$= \frac{sen(x)}{cos(x) \cdot \sqrt{sen(x)}} = \frac{\sqrt{sen(x)}}{cos(x)}$$

tal y como habíamos obtenido antes.

En definitiva, la derivada de la función es en este caso:

$$\boxed{y' = \frac{\sqrt{sen(x)}}{cos(x)}}$$

4. En este apartado comenzamos expresando la función como diferencia de logaritmos:

$$y = ln\left(\frac{1+cos(x)}{1-cos(x)}\right) = ln(1+cos(x)) - ln(1-cos(x))$$

Mediante derivación directa, obtenemos:

$$y' = \frac{1}{1+cos(x)}\cdot(-sen(x)) - \frac{1}{1-cos(x)}\cdot(sen(x)) = -sen(x)\cdot\left(\frac{1}{1+cos(x)} + \frac{1}{1-cos(x)}\right) =$$

$$= -sen(x)\cdot\left(\frac{1-\cancel{cos(x)}+1+\cancel{cos(x)}}{1-cos^2(x)}\right) = -sen(x)\cdot\left(\frac{2}{sen^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{-2\cdot sen(x)}{sen^2(x)} = \frac{-2}{sen(x)} = -2\cdot cosec(x)$$

La solución es:

$$\boxed{y' = \frac{-2}{sen(x)} = -2\cdot cosec(x)}$$

5. Partimos de la función

$$y = arctag\left(\frac{sen(x)}{1+cos(x)}\right)$$

Aplicando las técnicas de derivación, para la composición de funciones, y el cociente,

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{sen(x)}{1+cos(x)}\right)^2}\cdot\frac{cos(x)\cdot(1+cos(x))+sen^2(x)}{(1+cos(x))^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+cos(x))^2+sen^2(x)}{(1+cos(x))^2}}\cdot\frac{cos(x)+cos^2(x)+sen^2(x)}{(1+cos(x))^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(1+cos(x))^2}}{(1+cos(x))^2+sen^2(x)}\cdot\frac{cos(x)+1}{\cancel{(1+cos(x))^2}} =$$

$$= \frac{1+cos(x)}{1+cos^2(x)+2cos(x)+sen^2(x)} = \frac{1+cos(x)}{2+2cos(x)} = \frac{1+cos(x)}{2\cdot(1+cos(x) =} = \frac{1}{2}$$

Este resultado no es para nada inesperado, porque se puede probar que la fórmula de la **tangente del ángulo mitad** es:

$$tag\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}} = \frac{sen(x)}{1+cos(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En tal caso, nuestra función se podría haber expresado como:

$$y = arctag(tag\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

cuya derivada es claramente $\frac{1}{2}$. Esto refuerza la validez del resultado.

$$\boxed{y' = \frac{1}{2}}$$

6. Este es un nuevo ejemplo, de cómo un cambio de variable adecuado, simplifica mucho los cálculos. Sea

$$y = arcsen\left(2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$$

Por derivación directa, tendríamos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}\cdot\left(2\cdot\sqrt{1-x^2} + 2x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-2x^2)^2}}\cdot\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\cancel{1-2x^2}}\cdot\left(\frac{\cancel{1-2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por tanto la derivada es la expresión:

$$\boxed{y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Hubiera resultado más sencillo hacer el cambio de variable,

$$x = sen(t) \rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2(t)} = cos(t)$$

Por tanto, al ser

$$2\cdot sen(t)\cdot cos(t) = sen(2t)$$

tendríamos nuestra función expresada en la forma:

$$y(t) = arcsen(sen(2t)) = 2t$$

con $t = arcsen(x)$. Aplicando la regla de derivación compuesta, y notando que

$$\frac{dy}{dt} = 2, \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{darcsen(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

escribiríamos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

como antes.

7.

$$y = arctag\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Por derivación directa,

$$y' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1+x}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{\cancel{1+x}}{2} \cdot \frac{\cancel{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-2}{\cancel{(1+x)^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

La derivada es, por tanto:

$$\boxed{y' = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}}$$

8.

$$y = arcsen\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

Por derivación directa,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{2x\cdot(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{2x} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1}$$

La derivada es, por tanto:

$$\boxed{y' = \frac{2}{x^2+1}}$$

9. Sea la función

$$y = ln\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}\cdot\left(ln(1-\sqrt{x}) - ln(1+\sqrt{x})\right)$$

Por derivación directa,

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{+1}{2\sqrt{x}}\right) =$$
$$= \frac{-1}{4\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{-1}{4\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1+\cancel{\sqrt{x}}+1-\cancel{\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}\right) =$$
$$= \frac{-1}{4\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{1-x} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-x)}$$

La expresión de la derivada es

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}}$$

Si queremos hacer un cambio de variable, haríamos

$$t = \sqrt{x} \to x = t^2$$

de manera que nuestra función se transforma en otra más simple de derivar, en la variable t:

$$y(t) = ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1}{2}\cdot(ln(1-t) - ln(1+t))$$

Derivamos esta función respecto de t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1-t-1+t}{1-t^2}\right) = \frac{-1}{1-t^2} = \frac{-1}{1-x}$$

Como por otro lado,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

aplicando la regla de la cadena, obtendríamos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{1-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}$$

como antes.

10. Sea la función

$$y = \sqrt{\frac{1 - sen(x)}{1 + sen(x)}}$$

Vamos a expresarla de una manera más sencilla de derivar, multiplicando y dividiendo la fracción por el conjugado del denominador:

$$\sqrt{\frac{1 - sen(x)}{1 + sen(x)}} = \sqrt{\frac{(1 - sen(x))^2}{(1 - sen(x)) \cdot (1 + sen(x))}} = \sqrt{\frac{(1 - sen(x))^2}{1 - sen^2(x)}} = \frac{1 - sen(x)}{cos(x)}$$

Derivamos esta última función como cociente:

$$y' = \frac{-cos(x) \cdot cos(x) + (1 - sen(x)) \cdot sen(x)}{cos^2(x)} = \frac{-cos^2 + sen(x) - sen^2(x)}{cos^2(x)} =$$

$$= -\frac{1 - sen(x)}{1 - sen^2(x)} = -\frac{\cancel{1 - sen(x)}}{\cancel{(1 - sen(x))} \cdot (1 + sen(x))} = \frac{-1}{1 + sen(x)}$$

La expresión de la derivada es en este último caso,

$$\boxed{y' = \frac{-1}{1 + sen(x)}}$$

(En la última hoja del documento, incluimos un resumen de las derivadas pedidas.)

2. Soluciones

1. $y' = \dfrac{2}{cos(x)}$

2. $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

3. $y' = \dfrac{\sqrt{sen(x)}}{cos(x)}$

4. $y' = \dfrac{-2}{sen(x)}$

5. $y' = \dfrac{1}{2}$

6. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

8. $y' = \dfrac{2}{x^2+1}$

9. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}$

10. $y' = \dfrac{-1}{1+sen(x)}$